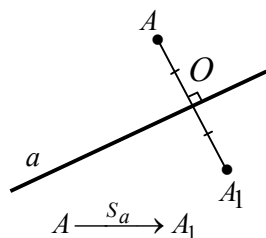


### Осевая симметрия. Определение, примеры

Если каждой точке плоскости ставится в соответствие какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке, то говорят, что дано **отображение плоскости на себя**.

Примером отображения плоскости на себя является осевая симметрия.

Две точки  $A$  и  $A_1$  называются **симметричными относительно прямой  $a$** , если эта прямая проходит через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна к нему.



#### Построение

- 1)  $a, A \notin a$ ;
- 2)  $AO \perp a$ ;  $OA \cap a = O$ ;
- 3)  $OA_1 = OA$ ,  $OA_1 \subset OA$ ;
- 4)  $A_1$  – искомая.

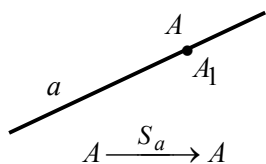
Рис. 1

Пусть прямая  $a$  – ось симметрии.

Возьмем произвольную точку  $A$ , не лежащую на прямой  $a$ , и построим симметричную ей точку  $A_1$  относительно прямой  $a$ .

Для этого проведем перпендикуляр  $AO$  к прямой  $a$  и отложим на прямой  $AO$  от точки  $O$  отрезок  $OA_1 = AO$ .

Точка  $A_1$  – искомая.



Если точка  $A$  лежит на прямой  $a$ , то симметричная с ней точка  $A_1$  совпадает с точкой  $A$ .

Каждая точка прямой  $a$  считается симметричной самой себе.

Рис. 2

Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точке  $A$  плоскости ставится в соответствие точка  $A_1$  этой же плоскости. При этом любая точка  $A_1$  оказывается сопоставленной

некоторой точке  $A$ . Значит, осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

**Фигура** называется **симметричной относительно прямой  $a$** , если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой  $a$  также принадлежит этой фигуре.

**Прямая  $a$**  называется **осью симметрии фигуры**. Говорят, что «фигура обладает осевой симметрией».

#### Примеры фигур, обладающих осевой симметрией

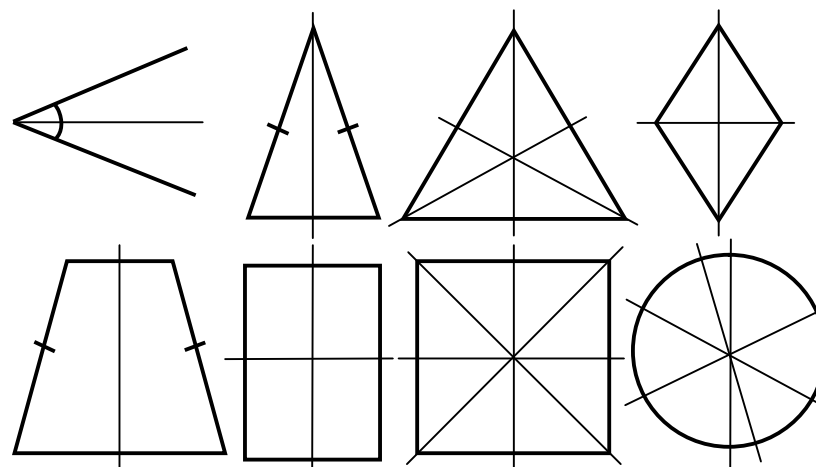


Рис. 3

Фигуры, не обладающие осевой симметрией: параллелограмм, но не прямоугольник и не ромб, разносторонний треугольник, неравнобедренная трапеция.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно стебля.

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией. В большинстве случаев симметричны относительно оси узоры на коврах, тканях, обоях. Симметричны многие детали механизмов.

Осевая симметрия обладает важным свойством, сформулированным в следующей теореме.

**Теорема.** Осевая симметрия является движением, то есть отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояние между точками.

**Дано:**  $M, N, M \xrightarrow{S_a} M_1, N \xrightarrow{S_a} N_1$ .

**Доказать:**  $MN = M_1N_1$ .

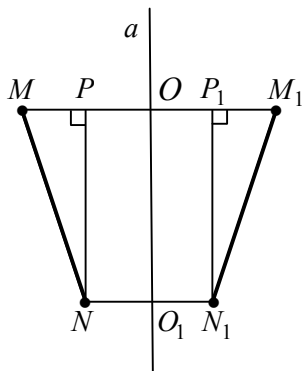


Рис. 4

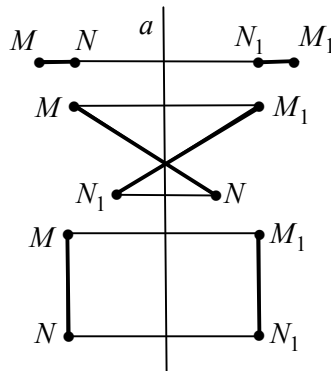


Рис. 5

#### Доказательство

Из точек  $N$  и  $N_1$  проведем перпендикуляры  $NP$  и  $N_1P_1$  к прямой  $MM_1$ . Рассмотрим получившиеся прямоугольные треугольники  $MNP$  и  $M_1N_1P_1$ :

По условию теоремы  $M \xrightarrow{S_a} M_1, N \xrightarrow{S_a} N_1$ , поэтому  $MO = OM_1$  и  $NO = ON_1$ ,  $MM_1 \perp a$  и  $NN_1 \perp a$ .

Так как перпендикуляры к одной прямой параллельны, то  $MM_1 \parallel NN_1$ . Значит,  $NP = N_1P_1$  как расстояния между параллельными прямыми  $MM_1$  и  $NN_1$ .

Так как на прямой  $NN_1$  отложены равные отрезки  $NO$ ,  $O_1N_1$  и через их концы проведены параллельные прямые  $NP$  и  $N_1P_1$  ( $NP \parallel N_1P_1$  как перпендикуляры к прямой  $MM_1$ ), то по теореме Фалеса  $PO = OP_1$ , значит и  $MP = M_1P_1$ .

Получили, что  $NP = N_1P_1$  и  $MP = M_1P_1$ . Следовательно,  $\triangle MNP = \triangle M_1N_1P_1$  по признаку равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам). В равных треугольниках соответ-

ствующие элементы равны, поэтому гипотенузы также равны, то есть  $MN = M_1N_1$ . Значит, расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно расстоянию между симметричными им точками  $M_1$  и  $N_1$ .

Возможны другие случаи расположения точек  $M, N$  и  $M_1, N_1$ , они представлены на рисунке 5, в каждом из них  $MN = M_1N_1$ .

**Итак,** осевая симметрия является отображением плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками, то есть является движением плоскости.

**Ч.т.д.**

**Замечание.** Осевую симметрию можно представить как поворот плоскости в пространстве на  $180^\circ$  вокруг оси  $a$ .